

Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις

Τετάρτη 25-6-2014

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ :

A.M.:

1. Θεωρούμε την εξίσωση Legendre

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + m(m+1)y(x) = 0, \quad x \in (-1, 1).$$

- Αποκλειστικά με χρήση δυναμοσειρών, να αποδειχθεί ότι για $m \in \mathbb{N}$ η εξίσωση έχει μια πολυωνυμική λύση.
- Να επιλυθεί η εξίσωση για $m = 2$.
- Να εξετασθούν τα πολυώνυμα $P_m(x)$ ως προς το άρτιο-περιττό και να αποδειχθεί ότι η ακολουθία πολυωνύμων $(P_n(x))$ είναι ορθογώνια στο διάστημα $[-1, 1]$.

2. i) Να επιλυθεί η εξίσωση $y' - y + e^{-x}y^2 = 4e^x$ με δεδομένο ότι έχει μια λύση της μορφής ke^{mx} .
ii) Να διαπιστωθεί ότι η $y_1 = x$ είναι μια λύση της εξίσωσης $-2y' + (\frac{y}{x})^2 + \frac{y}{x} = 0$ και, στη συνέχεια, να βρεθεί η λύση y με $y(1) = 2$.

A-22 iii) Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$2(y')^2 = (y-1)y'', \quad y(1) = 2, y'(1) = -1.$$

3. i) Να βρεθεί η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης $z_x - z_y = 1, x, y \in \mathbb{R}$ που πληροί την συνθήκη $z(x, 0) = \sin x$.

ii) Να λυθεί το μη ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y_1' = 4y_1 + 5y_2 + x^2 + 3x + 1, \quad y_2' = -2y_1 - 2y_2. \quad \text{ΣΥΣΤΗΜΑ Α}$$

4. i) Να αποδειχθεί ότι κάθε λύση της δ. ε. $y'' + y = x^{-k}, x \geq 1, (k > 1)$ είναι φραγμένη.

ii) Αν y_1, y_2 είναι ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων μιας ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με διάστημα ορισμού $(-\infty, +\infty)$, να αποδειχθεί ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της y_1 υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της y_2 .

iii) Αν $\{y_1, \dots, y_n\}$ και $\{z_1, \dots, z_n\}$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα λύσεων μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης n -τάξης και ορίζουσες Wronski W_y, W_z , αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι $W_y = CW_z$ για κάποιον σταθερό πραγματικό αριθμό με $C \neq 0$. Να διατυπωθεί το θεώρημα που χρησιμοποιήθηκε. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\{y_1, y_1 + y_2, \dots, y_1 + \dots + y_n\}$ είναι βασικό σύνολο λύσεων.

Να δοθούν απαντήσεις σε δυο ερωτήματα από το κάθε θέμα.